www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MATHÉMATIQUES

Groupe B

DURÉE : 4 heures.

Dans ce qui suit, K désigne un sous-corps du corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. On note $\deg(P)$ le degré d'un élément P de $K[X]$. De plus, pour tout couple (P,Q) d'éléments de $K[X]$, on note $(P \bmod Q)$ le reste de la division euclidienne de P par Q. On rappelle que P et Q sont dits premiers entre eux si et seulement si leur pgcd est égal à 1.

Si P,Q,R sont trois éléments de $K[X]$, et si n est un entier ≥ 3, on dira que le triplet (P,Q,R) vérifie l'hypothèse (H_n) si l'on a

i) $\deg(P) = n$, $\deg(Q) \leq n$,

ii) $PQ' - P'Q = R^2$

iii) P et R sont premiers entre eux.

Partie I

$I-1$. Soit $P(X) = X^n - X$. Trouver Q et R dans $\mathbf{Q}[X]$, où $\mathbf{Q}$ est le corps des nombres rationnels, tels que (P,Q,R) vérifie (H_n) (On pourra chercher Q sous la forme $-X^{n-1}+a$.)

$I-2$. Montrer que, si le triplet (P,Q,R) vérifie (H_n), il en est de même du triplet $(P, Q+\lambda P, R)$, où $\lambda \in K$.

$I-3$. Soit (P,Q,R) vérifiant (H_n). Si a est une racine de R de multiplicité m, quelle est la multiplicité de a comme racine du polynôme $P(X)Q(a) - P(a)Q(X)$?

$I-4$. Dans cette question, et jusqu'à la fin de la partie I, on suppose que $K = \mathbf{R}$, le corps des nombres réels. Montrer que si le triplet (P,Q,R) vérifie (H_n), le polynôme P a au moins une racine réelle.

$I-5$. Soit (P,Q,R) vérifiant (H_n). On suppose que les racines de P sont réelles.

$I-5-a$) Montrer que toutes les racines de Q sont réelles.

$I-5-b$) Montrer que R ne peut pas avoir de racine réelle (On pourra raisonner par l'absurde, et considérer le polynôme $P(a)Q(X) - Q(a)P(X)$, avec a racine réelle éventuelle de R.)

$I-5-c$) Montrer que n est impair.

Partie II

Soit f un élément de $K(X)$. Si a est un pôle de f, le résidu de f en a, noté $\mathrm{Res}_a f$, est par définition le coefficient de $\frac{1}{X-a}$ dans la décomposition en éléments simples de f dans $\mathbf{C}(X)$.

$II-1$. Soient U et V deux éléments de $K[X]$ tels que $\deg(U) \leq \deg(V) - 2$. Calculer

$$\sum_a \mathrm{Res}_a \frac{U}{V},$$

où a parcourt les pôles de f.

$II-2$. Soient U et V deux éléments de $K[X]$ premiers entre eux. Si a et une racine simple de V, calculer $\mathrm{Res}_a \frac{U}{V^2}$ en fonction de $U(a), U'(a), V'(a)$ et $V''(a)$.

$II-3$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ n nombres complexes deux à deux distincts. On pose $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - x_i)$. Si E_{n-1} désigne le sous-espace vectoriel des éléments de $\mathbf{C}[X]$ de degré $\leq n-1$, on note B l'application de $E_{n-1} \times E_{n-1}$ dans $\mathbf{C}$ définie par

$$B(S,T) = \sum_{i=1}^n \frac{S(x_i)T(x_i)}{P'^3(x_i)}.$$

Tournez la page S.V.P.

II – 3 – *a*) Montrer que B est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée (On rappelle qu'une forme bilinéaire symétrique ϕ sur un espace vectoriel E de dimension finie est dite non dégénérée si, pour tout $x \neq 0$ de E, il existe $y \in E$ tel que $\phi(x, y) \neq 0$.)

II – 3 – *b*) Soit u l'endomorphisme de E_{n-1} défini par

$$u(S) = P''S - 2P'S' \bmod P.$$

Montrer que, pour tout couple (S, T) d'éléments de E_{n-1}, on a

$$B(u(S), T) + B(S, u(T)) = 0.$$

II – 3 – c). Soit m un entier impair. Montrer qu'une matrice de type (m, m) antisymétrique est non inversible. En déduire que, si n est impair, u n'est pas injective.

II – 4. Soient P et R deux éléments de $K[X]$ premiers entre eux. On note n le degré de P, et on suppose que $\deg(R) < n$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes:

i) Il existe Q dans $K[X]$ tel que (P, Q, R) vérifie H_n,

ii) Le polynôme $P''R - 2P'R'$ est divisible par P.

II – 5. Soit n un entier impair, et P un polynôme irréductible de $K[X]$ de degré n. Montrer qu'il existe deux éléments Q et R de $K[X]$ tels que (P, Q, R) vérifie H_n.

Partie III

III – 1. Soit A une matrice de type (n, n) antisymétrique, et C sa matrice des cofacteurs.

III – 1 – *a*) Calculer la matrice transposée de C en fonction de C et de n.

III – 1 – *b*) En déduire que, si n est pair et A non inversible, le rang de A est $\leq n - 2$.

III – 2. Dans ce qui suit et jusqu'à la fin du problème, $K = \mathbf{R}$.

Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ n nombres réels deux à deux distincts. Soit M la matrice (n, n) de terme général $m_{ii} = 0$ $(1 \leq i \leq n)$, et $m_{ij} = \frac{1}{x_i - x_j}$ pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$.

On pose $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$.

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes:

i) Il existe Q et R dans $\mathbf{R}[X]$ tels que (P, Q, R) vérifie H_n.

ii) Il existe une matrice N à n lignes et 1 colonne, dont toutes les composantes sont non nulles, et telle que $MN = 0$.

(On pourra décomposer Q/P et R/P en éléments simples.)

III – 3. **Soit n un entier impair ≥ 3, et P un élément de $\mathbf{R}[X]$ dont les racines sont réelles et distinctes.**

Montrer qu'il existe un unique couple de polynômes (Q, R), avec $\deg(Q) < n$ et R unitaire, tels que le triplet (P, Q, R) vérifie (H_n).

(On pourra raisonner par récurrence sur n, et utiliser la partie *I*.)

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail